OSN 2017 Hari Kedua

Raja Damanik
rajaoktovin@gmail.com

1. Diberikan polinom P dengan koefisien-koefisien bilangan bulat. Diketahui bahwa persamaan $P(x) = 0$ mempunyai sedikitnya 9 solusi bilangan bulat berbeda. Misalkan juga n adalah sembarang bilangan bulat dengan sifat $|P(n)| < 2017$. Buktikan bahwa $P(n) = 0$.

   Solusi.

   Misalkan $t_1, \ldots, t_9$ adalah bilangan bulat berbeda sehingga $P(t_i) = 0$ untuk $i = 1, \ldots, 9$. Tulis $P(x) = (x - t_1) \ldots (x - t_9)Q(x)$ untuk suatu polinomial $Q(x)$ berkoefisien bulat. Jika $n = t_i$ untuk suatu i, maka $P(n) = 0$ juga.

   Asumsikan $n \neq t_i$ untuk $i = 1, \ldots, 9$. Akan ditunjukkan bahwa $|P(n)| \geq 2017$. Perhatikan bahwa sekarang $|Q(n)| \geq 1$. Selain itu, $|n - t_i|$ bernilai sama untuk paling banyak dua indeks i. Jadi, nilai terkecil yang mungkin untuk $|(n - t_1) \ldots (n - t_9)|$ adalah $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5 = 2880$. Jika $Q(n) \neq 0$, maka $|Q(n)| \geq 1$, sehingga $|P(n)| = |(n - t_1) \ldots (n - t_9)Q(n)| \geq 2880$. Kontradiksi dengan $|P(n)| < 2017$. Dengan demikian, haruslah $Q(n) = 0$, yang jelas berakibat $P(n) = 0$.

2. Tentukan banyaknya bilangan asli yang tidak lebih besar dari 2017 sedemikian sehingga n habis membagi $20^n + 17k$ untuk suatu bilangan asli k.

   Solusi.

   Jika n habis dibagi 17, maka $17 | 20^n + 17k$ sehingga $17 | 20^n$, yang tidak mungkin terpenuhi. Jadi, n dan 17 relatif prima.

   Sekarang, misalkan $20^n \equiv t \pmod{n}$. Perhatikan bahwa terdapat bilangan asli k sehingga $17k \equiv -t \pmod{n}$. Untuk nilai k ini, berlaku $n | 20^n + 17k$.

   Jadi, n yang memenuhi adalah yang tidak habis dibagi 17. Banyaknya bilangan asli yang tidak lebih dari 2017 dan tidak habis dibagi 2017 adalah $2017 - \lfloor \frac{2017}{17} \rfloor = 1899$.

3. Diberikan jajargenjang $ABCD$. Titik E dan titik F dipilih berturut-turut pada sisi BC dan CD sedemikian rupa sehingga segitiga ABE dan segitiga BCF mempunyai luas yang sama. Diagonal BD memotong AE dan AF berturut-turut di M dan N. Buktikan terdapat segitiga yang panjang sisi-sisinya sama dengan BM, MN, dan ND.

   Solusi.

   Misalkan pula $AB = x, AD = y, BE = s$, dan $CF = t$. Misalkan $\angle BCD = \theta$. Karena segitiga ABE dan BCF memiliki luas yang sama, maka

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} xs \sin(180 - \theta) &= \frac{1}{2} yt \sin\theta \\ xs &= yt. \end{aligned}$$

   Karena segitiga ADM dan segitiga EBM sebangun, maka

$$\begin{aligned} DM : MB &= DA : EB \\ &= y : s \qquad (1) \end{aligned}$$

   Misalkan garis AN memotong perpanjangan sisi BC di titik G. Karena segitiga ADN dan GBF sebangun, maka

$$BN : ND = BG : AD. \quad (*)$$

   Namun, perhatikan baahwa $CF \parallel AB$, sehingga

$$\begin{aligned} CG : BG &= CF : AB \\ &= t : x \\ &= s : y, \end{aligned}$$

   sehingga dengan menggunakan hubungan $BG = CG + BC = CG + y$, maka diperoleh $BG = \frac{y^2}{y-s}$. Kembali ke persamaan $(*)$, kita peroleh

$$\begin{aligned} BN : ND &= \frac{y^2}{y-s} : y \\ &= y : y - s. \qquad (2) \end{aligned}$$

   Dari (1) dan (2), karena $s < y$, maka kita peroleh bahwa

$$\begin{aligned} DN + NM = DM &> MB \\ MB + NM = BN &> DN. \end{aligned}$$

Sekarang, cukup ditunjukkan bahwa $BM + DN > MN$, yang ekivalen dengan $2(BM + DN) > BD$.

Dari (1), $BM = \frac{s}{y+s}BD$. Dari (2), $DN = \frac{y-s}{2y-s}BD$. Jadi, $BM + DN = (\frac{s}{y+s} + \frac{y-s}{2y-s})BD$. Jadi, kita cukup menunjukkan bahwa

$$\begin{aligned}
&\frac{s}{y+s} + \frac{y-s}{2y-s} > \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{2ys - s^2 + y^2 - s^2}{2y^2 + ys - s^2} > \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow 4ys - 4s^2 + 2y^2 > 2y^2 + ys - s^2 \\
&\Leftrightarrow 3ys > 3s^2
\end{aligned}$$

yang jelas benar karena $y > s$.

Jadi, BM, MN, ND merupakan sisi-sisi suatu segitiga.

4. Lantai dari sebuah aula ditutupi dengan 2017×2017 ubin satuan. Luffy mempunyai sejumlah detektor. Setiap detektor yang diletakkan di atas ubin akan menyala jika tepat di bawahnya terdapat emas, dan tidak bereaksi apapun jika tidak ada emas di bawahnya. Luffy meletakkan k buah detektor tepat di atas k buah ubin kemudian dia keluar ruangan. Kemudian Sanji memilih suatu daerah persegi yang ditutupi oleh 1500×1500 ubin satuan dan menyembunyikan tepat satu koin emas di bawah setiap ubin. Ketika Luffy kembali dan melihat detektor yang tadi dia pasang, dia dapat menentukan letak semua koin yang tadi ditanam Sanji.

   Tentukan nilai k terkecil agar Luffy selalu dapat menentukan letak semua koin tak peduli daerah manapun yang dipilih Sanji.

   Solusi.

   Labeli baris dari atas ke bawah dengan 1 hingga 2017. Labeli kolom dari kiri ke kanan dengan 1 hingga 2017. Labeli kotak pada baris x dan kolom y dengan (x, y). Kita labeli suatu daerah yang ditutupi ubin berukuran 1500×1500 dengan kotak (x, y) pada ujung kiri atasnya dengan $R_{x,y}$ dengan $1 \leq x, y \leq 518$. .

   Perhatikan bahwa status k detektor pada saat Luffy meletakkan koin emas pada daerah $R_{x,y}$ dengan daerah $R_{x',y'}$. Namun, detektor yang berubah status hanya yang berada di daerah $R_{x,y} \oplus R_{x',y'}$ (yaitu, kotak yang berada di tepat satu dari dua daerah ini). $(*)$

Misalkan $L_1 = [1, 517], L_2 = [518, 1500], L_3 = [1501, 2017]$. Misalkan pula $A_{ij} = \{(x, y) : x \in L_i, y \in L_j\}$. Terakhir, misalkan $n_{i,j}$ menyatakan banyak detektor pada daerah $A_{i,j}$.

Berdasarkan pengamatan $(*)$, untuk setiap $k \in L_1$, harus ada sedikitnya sebuah detektor di $R_{1,k} \oplus R_{1,k+1}$. Perhatikan bahwa

$$R_{1,k} \oplus R_{1,k+1} = \{(x, y) : x \in L_1 \cup L_2, y \in \{k, k + 1500\}\}.$$

Terlihat pula bahwa $R_{1,k} \oplus R_{1,k+1}$ saling lepas untuk $k = 1, \ldots, 517$. Dengan demikian, sedikitnya ada 517 detektor di

$$\begin{aligned}\bigcup_{k \in L_1} (R_{1,k} \oplus R_{1,k+1}) &= \bigcup_{k \in L_1} \{(x, y) : x \in L_1 \cup L_2, y \in \{k, k + 1500\}\} \\ &= A_{11} \cup A_{21} \cup A_{13} \cup A_{23}.\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$n_{11} + n_{21} + n_{13} + n_{23} \geq 517.$$

Dengan argumen yang serupa, kita juga dapat memperoleh ketaksamaan berikut:

$$\begin{aligned}n_{21} + n_{31} + n_{23} + n_{33} &\geq 517, \\ n_{11} + n_{12} + n_{31} + n_{32} &\geq 517, \\ n_{12} + n_{13} + n_{32} + n_{33} &\geq 517.\end{aligned}$$

Jumlahkah keempat ketaksamaan ini, maka diperoleh

$$2(n_{11} + n_{12} + n_{13} + n_{21} + n_{23} + n_{31} + n_{32} + n_{33}) \geq 4 \cdot 517$$

sehingga diperoleh

$$n_{11} + n_{12} + n_{13} + n_{21} + n_{23} + n_{31} + n_{32} + n_{33} \geq 1034.$$

Karena $n_{22} \geq 0$, maka $\sum_{i,j \in \{1,2,3\}} n_{ij} \geq 1034$, yaitu ada sedikitnya 1034 detektor.

Perhatikan 1034 detektor cukup. Letakkan detektor pada $(i, 1000)$ dan $(1000, j)$ untuk $i, j \in L_1$. Jika tidak ada detektor yang menyala, berarti $R_{518,518}$ adalah daerah yang mengandung koin emas. Jika i dan j terkecil sehingga detektor $(i, 1000)$ dan $(1000, j)$ menyala adalah i' dan j', maka, daerah yang mengandung koin emas adalah $R_{i',j'}$.