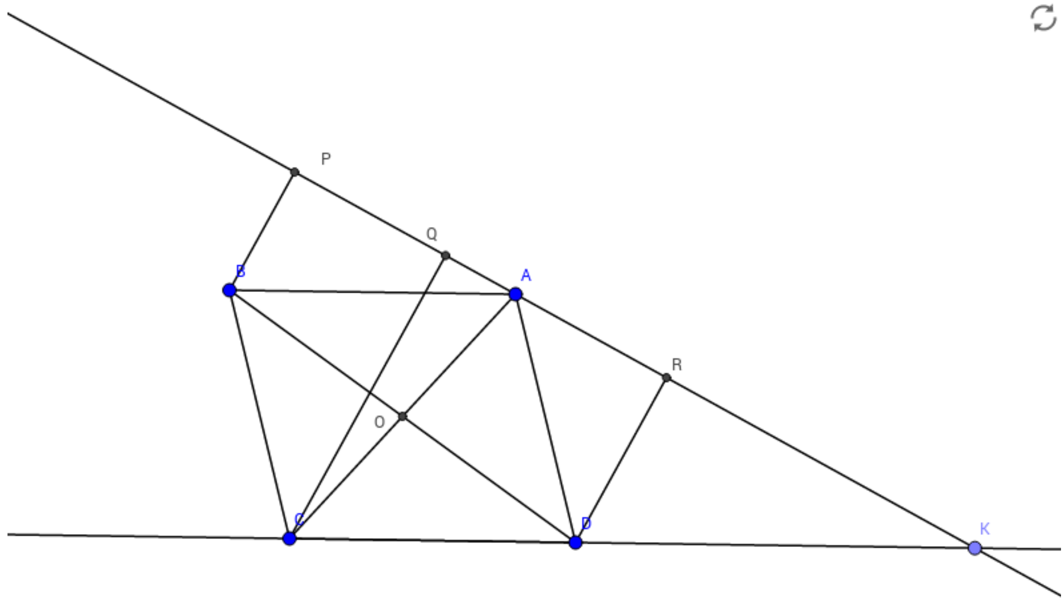
OSN 2017 Hari Pertama

Raja Damanik
rajaoktovin@gmail.com

1. Misalkan titik sudut A dari jajargenjang $ABCD$, dibuat suatu garis g. Buktikan bahwa jarak dari C ke garis g adalah jumlah atau selisih jarak dari B dan D ke g.

   Solusi.

   Misalkan P, Q, R berturut-turut adalah kaki tegak lurus dari B, C, D ke g. Misalkan pula g memotong garis CD di K. Perhatikan bahwa segitiga KQC dan KRD sebangun, sehingga $DR = \frac{KD}{KC}CQ$. Perhatikan pula segitiga KQC dan APB sebangun sehingga $BP = \frac{AB}{KC}CQ$.



Kasus (iii): K terletak pada sinar CD.

Ada tiga kemungkinan letak titik K:

(i) Jika K terletak pada segmen CD, maka $KC + KD = CD = AB$, sehingga $BP - DR = CQ$.

(ii) Jika K terletak pada sinar DC, maka $KC + AB = KC + CD = KD$, sehingga $DR - BP = CQ$.

(iii) Jika K terletak pada sinar CD, maka $KD + AB = KD + CD = KC$, sehingga $DR + BP = CQ$.

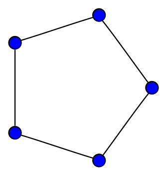
Jadi, CQ adalah jumlah atau selisih DR dan BP.

2. Lima orang siswa bertemu di suatu tempat. Sebuah *trio* adalah pasangan tiga siswa (A, B, C) sehingga A berjabat tangan dengan B dan B berjabat tangan dengan C, atau A tidak berjabat tangan dengan B dan B tidak berjabat tangan dengan C. Jika trio (A, B, C) dan (C, B, A) dianggap sebagai trio yang sama, berapa paling sedikit banyaknya trio yang mungkin?

Solusi.

Untuk sebuah trio (A, B, C), kita sebut B sebagai *pusat*. Kita tunjukkan bahwa setiap siswa menjadi pusat setidaknya pada dua trio berbeda. Misalkan X adalah seorang siswa dan ia bersalaman dengan k orang anak, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Banyak trio dimana X adalah pusat adalah $\binom{k}{2} + \binom{4-k}{2}$. Mudah dicek bahwa nilai ini akan minimum untuk $k = 2$, yaitu 2 trio. Jadi, karena ada 5 siswa, paling sedikit haruslah ada $5 \times 2 = 10$ trio.

Nilai 10 mungkin dicapai, misalnya pada graf C_5.



3. Suatu bilangan asli d dikatakan *istimewa* jika setiap bilangan bulat dapat dinyatakan sebagai $a^2 + b^2 - dc^2$ untuk suatu bilangan bulat a, b, dan c.

(a) Tentukan bilangan asli terkecil yang tidak istimewa.

(b) Tunjukkan bahwa 2017 istimewa.

Solusi.

(a) Untuk setiap bilangan bulat k, kita punyai

$$(k + 1)^2 + 1^2 - k^2 = 2k$$
$$(k - 1)^2 + 2^2 - (k - 2)^2 = 2k + 1,$$

sehingga 1 merupakan bilangan istimewa.

Untuk setiap bilangan bulat k, kita juga punyai

$$\begin{aligned} k^2 + (k+1)^2 - 2k^2 &= 2k+1 \\ (k+1)^2 + (k+1)^2 - 2k^2 &= 4k+2 \\ (k+1)^2 + (k-1)^2 - 2(k-1)^2 &= 4k, \end{aligned}$$

sehingga 2 merupakan bilangan istimewa.

Asumsikan ada bilangan bulat a, b, c sehingga $a^2 + b^2 - 3c^2 = 3$. Maka, $3 | a^2 + b^2$ dan ini berakibat $3|a$ dan $3|b$ (mengapa?). Tulis $a = 3a_0, b = 3b_0$, maka persamaan menjadi $3(a_0^2 + b_0^2) = c^2 + 1$. Namun, 3 tidak membagi $c^2 + 1$ untuk setiap bilangan bulat c. Jadi, 3 bukan bilangan istimewa.

Jadi, bilangan asli terkecil yang tidak istimewa adalah 3.

(b) Untuk setiap bilangan bulat k, berlaku

$$(9k + x)^2 + (44k + y)^2 - 2017k^2 = 2k(9x + 44y) + (x^2 + y^2).$$

Perhatikan bahwa terdapat bilangan bulat ganjil $x = 2x_0+1$ dan genap $y = 2y_0$ sehingga $9x+44y = 1$. Ini karena persamaan berbentuk $9x_0+44y_0 = -4$ memiliki solusi bilangan bulat menurut Teorema Bezout. Ini berakibat semua bilangan ganjil dapat ditulis sebagai $a^2 + b^2 - 2017c^2$.

Argumen yang sama untuk menunjukkan terdapat bilangan bulat ganjil $x = 2x_0 + 1$ dan ganjil $y = 2y_0 + 1$ yang memenuhi $9x + 44y = 1$ dengan menggunakan Teorema Bezout. Dengan demikkian semua bilangan genap dapat ditulis sebagai $a^2 + b^2 - 2017c^2$.

4. Tentukan semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned} x^{100} - y^{100} &= 2^{99}(x-y) \\ x^{200} - y^{200} &= 2^{199}(x-y) \end{aligned}$$

dengan x dan y berbeda.

Solusi.

Perhatikan bahwa $x^{100} + y^{100} = 2^{100}$ dan $x^{99} + x^{98}y + \cdots + xy^{98} + y^{99} = 2^{99}$.

Perhatikan bahwa dari persamaan $x^{100} + y^{100} = 2^{100}$, kita punyai $|x|, |y| \leq 2$.

Kita tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan real berbeda x dan y dan bilangan asli k, berlaku

$$x^{2k} + x^{2k-1}y + \cdots + xy^{2k-1} + y^{2k} \geq 0.$$

Ketaksamaan ekivalen dengan $\frac{x^{2k+1}-y^{2k+1}}{x-y} \geq 0$. Namun, ketaksamaan jelas benar karena untuk $x \neq y$, berlaku $x > y$ jika dan hanya jika $x^{2k+1} > y^{2k+1}$.

Kesamaan terjadi

Sekarang, jika $y \leq 0$, maka $x^{99} + y(\underbrace{x^{98} + x^{97}y + \cdots + xy^{97} + y^{98}}_{\geq 0}) \leq x^{99} \leq |x|^{99} = 2^{99}$, sehingga karena kesamaan terjadi, maka $x = |x| = 2$. Jika $x = 2$, maka haruslah $y = 0$. Mudah dicek bahwa $(x, y) = (2, 0)$ adalah solusi. Jika $x \leq 0$, maka dengan cara serupa diperoleh kemungkinan $(x, y) = (0, 2)$. Mudah dicek bahwa ini juga solusi.

Sekarang, asumsikan $x, y > 0$.

Perhatikan bahwa karena $x, y > 0$, dari persamaan $x^{100} + y^{100} = 2^{100}$ kita juga punyai $x, y < 2$. Akibatnya, $2^{100} = x^{100} + y^{100} < 2x^{99} + 2y^{99}$. Jadi, $x^{99} + y^{99} > 2^{99}$. Namun ini berakibat $x^{99} + x^{98}y + \cdots + xy^{98} + y^{99} > 2^{99}$ sehingga persamaan kedua tidak terpenuhi. Jadi, tidak ada solusi untuk x dan y positif.

Jadi, solusi sistem persamaan tersebut adalah $(x, y) = (2, 0)$ dan $(0, 2)$.